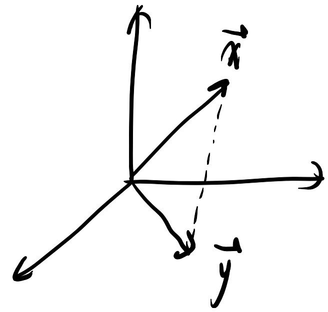
R^n上的线性变换、

线性空间、线性变换、

1、 R^n上的变换：$T: R^n \to R^m$ 对任何R^n中的向量$\vec{x}$，有R^m中唯一的向量$\vec{y}$与之对应。



例1、 $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 投影变换。

$T\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $T: R^3 \to R^2$

例2、 $A\vec{x} = \vec{y}$ $\quad T\vec{x} = A\vec{x}$

$A = \begin{pmatrix}1 & -3\\3 & 5\\-1 & 7\end{pmatrix}$， $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$， $\vec{y} = A\vec{x} = \begin{pmatrix}1 & -3\\3 & 5\\-1 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\\-9\end{pmatrix}$

$A: R^2 \to R^3$

变换 $\Rightarrow$ 算子。

2、 线性变换：T：$\begin{cases} ① \ T(\vec{u}+\vec{v}) = T\vec{u} + T\vec{v} \\ ② \ T(\lambda\vec{u}) = \lambda T\vec{u} \end{cases}$ $\Rightarrow$ T是线性的

$\lambda, \mu \in R$

T：$T(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda T\vec{u} + \mu T\vec{v}$

例3、 $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 是线性变换。

解：$\vec{u} = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$， $\vec{v} = \begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$， $\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{pmatrix}$

$T(\vec{u}+\vec{v}) = T\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}$

$$T\vec{u}=T\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}. \quad T\vec{v}=T\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$$

$$T\vec{u}+T\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}=T(\vec{u}+\vec{v}) \quad ①满足$$

$$T(\lambda\vec{u})=T\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda y_1\\\lambda z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda y_1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\lambda T\vec{u} \quad ②满足$$

$\Rightarrow$ T是线性变换

$$\left(T(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})=\lambda T\vec{u}+\mu T\vec{v}\right)$$

$$T(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})=T\begin{pmatrix}\lambda x_1+\mu x_2\\\lambda y_1+\mu y_2\\\lambda z_1+\mu z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x_1+\mu x_2\\\lambda y_1+\mu y_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\lambda T\vec{u}+\mu T\vec{v}$$

$\Rightarrow$ T是线性变换.

例4. 设T是线性变换. $T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$, 求 $T\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$. (像)

解: $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc:c}1&1&4\\1&-2&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc:c}1&1&4\\0&-3&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc:c}1&1&4\\0&1&\frac{1}{3}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc:c}1&0&\frac{11}{3}\\0&1&\frac{1}{3}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow a=\frac{11}{3},\ b=\frac{1}{3}, \qquad \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\frac{11}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=T\left(\frac{11}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)=\frac{11}{3}T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}T\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{11}{3}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}27\\-32\end{pmatrix}$$